

Mamonov S.S., Ionova I.V. VIBRATIONS OF SYSTEM OF SELF-LOCKED LOOP

For a system of differential equations conditions for the existence of cycles of the second kind are received. The algorithm for determining the phase space containing the limit cycle of the second kind is offered.

Key words: limit cycles of second kind; matrix equation; phase-locked.

УДК 531.38

ДИНАМИКА УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ НЕКОНТАКТНОГО ГИРОСКОПА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВИБРАЦИЯХ ТОЧКИ ПОДВЕСА

© А.В. Медведев

Ключевые слова: гироскоп; трехгранник; дебаланс; случайный процесс; корреляционная функция; кинетический момент; момент силы; стохастические уравнения; метод осреднения; моментные функции.

В работе рассматривается задача о движении быстро вращающегося несбалансированного гироскопа под действием произвольной пространственной вибрации, которая предполагается стационарным векторным случайным процессом. С помощью метода осреднения стохастических систем и применения уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка получены и проанализированы уравнения для моментных функций первого и второго порядков фазовых координат, задающих движение неконтактного гироскопа.

Рассматривается задача о движении быстро вращающегося динамически симметричного твердого тела вокруг точки, которая совершает случайные колебания в пространстве. Пусть O , O_1 являются точками подвеса и центра масс гироскопа, соответственно, при этом точка O совершает перемещения по случайному закону. Для изучения углового движения гироскопа введем правые ортогональные трехгранники $\xi_1\xi_2\xi_3$, $\eta_1\eta_2\eta_3$, $z_1z_2z_3$ и $y_1y_2y_3$. Трехгранник ξ считаем неподвижным. Начала трехгранников η , z и y выбираем в точке O . Оси η_j параллельны осям ξ_j . Трехгранник z связываем с вектором кинетического момента гироскопа $\vec{K}$, при этом ось z_3 направляем вдоль $\vec{K}$. Трехгранник y жестко связан с телом, ось y_3 является осью симметрии эллипсоида инерции тела. Направление оси y_1 выбираем так, чтобы вектор дебаланса $\vec{E} = \vec{OO_1}$ лежал в плоскости y_1y_3 . Согласно определению трехгранника y , проекции вектора $\vec{E}$ на оси $y_1y_2y_3$ имеют вид:

$$Ey_1 = E \cos \beta, \quad Ey_2 = 0, \quad Ey_3 = E \sin \beta.$$

Здесь E – модуль дебаланса; $\beta = \text{const}$ – угол между $\vec{E}$ и экваториальной плоскостью центрального эллипсоида инерции гироскопа.

Взаимное положение введенных выше трехгранников определим следующим образом: трехгранник z получается из трехгранника η двумя последовательными поворотами на угол σ вокруг оси η_1 и на угол ρ вокруг второй оси промежуточного трехгранника. Трехгранник y получается из трехгранника z тремя последовательными поворотами: на угол ψ вокруг оси z_1 , на угол ϑ вокруг второй оси и на угол φ вокруг третьей оси промежуточных трехгранников. В качестве фазовых координат, задающих угловое движение гироскопа, выберем следующие элементы: величину модуля вектора кинетического момента

K , углы σ, ρ, φ и направляющие косинусы $G_1 = \sin \vartheta$, $G_2 = -\sin \psi \cos \vartheta$, $G_3 = \cos \psi \cos \vartheta$ оси OY_3 с осями трехгранника Z . Предположим, что перемещение точки подвеса O происходит произвольным образом в пространстве, в отличие от работ [1], [2], где перемещение точки подвеса предполагалось происходящей в плоскости или вдоль неподвижной оси, соответственно. Угловое движение гироскопа будем изучать в системе координат $O\eta_1\eta_2\eta_3$. Для этого к центру масс O_1 необходимо приложить силу инерции переносного движения $\vec{f}\{f_1(\tau), f_2(\tau), f_3(\tau)\}$, которую будем считать векторным стационарным случайным процессом с нулевым средним и заданной корреляционной матрицей $K_{ij}(\tau) = \langle f_i(0)f_j(\tau) \rangle$.

Предположим, что E достаточно малая величина. Поставим задачу отыскания асимптотического решения при $E > 0$. При $E = 0$ имеем свободное движение Эйлера–Пуансо для симметричного твердого тела [3]:

$$\begin{aligned}\rho &= x_1, \quad \sigma = x_2, \quad K = 1 + x_3, \quad G_1 = x_4 \sin \tau + x_5 \cos \tau, \\ \varphi &= \tau \cdot \alpha + G_3 \int_0^\tau G_1^2 (G_2^2 + G_3^2)^{-1} d\tau + x_6, \quad G_2 = -x_4 \cos \tau + x_5 \sin \tau \\ x_i &= \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots, 6,\end{aligned}$$

I_1 – экваториальный, $I_3 = I_1/\alpha$ – полярный моменты инерции гироскопа, $K = 1$ – в невозмущенном движении.

Возмущенное движение при $E \neq 0$ опишем в новых перемещениях $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, которые будут уже функциями времени. Уравнения возмущенного движения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}K \dot{x}_1 &= \varepsilon m_1, \quad K \cos x_1 \dot{x}_2 = -\varepsilon m_2, \quad \dot{K} = \varepsilon m_3, \\ \dot{x}_4 &= -x_3 x_5 + \varepsilon K^{-1} [-x_5 m_2 \operatorname{tg} x_1 + (m_2 \cos \tau - m_1 \sin \tau) G_3], \\ \dot{x}_5 &= x_3 x_4 + \varepsilon K^{-1} [x_4 m_2 \operatorname{tg} x_1 + (m_2 \sin \tau + m_1 \cos \tau) G_3], \\ \dot{x}_6 &= K G_3 \cdot \alpha + K (G_2^2 + G_3^2)^{-1} [G_3 G_1^2 - \varepsilon (m_1 G_2 - m_2 G_3 \operatorname{tg} x_1)], \quad \varepsilon = E F_0 I_1 K_0^{-2}\end{aligned}$$

Здесь $m_i (i = 1, 2, 3)$ – проекции момента силы $\vec{f}$ относительно точки O на оси z_i ; F_0, K_0 – характерные значения $\vec{f}$ и K , $\bullet$ – означает дифференцирование по времени τ . Эта система является стохастической системой дифференциальных уравнений.

Применяя схему осреднения [4] и используя уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка для переходной функции распределения плотности вероятностей, получим дифференциальные уравнения для моментных функций первого и второго порядков. Не выписывая эти уравнения в общем виде, ограничимся окончательным представлением средних величин как функции времени:

$$\begin{aligned}\langle \rho \rangle &= \frac{\varepsilon^2}{4} \{ \cos^2 \beta [S_{13}(\alpha) + S_{31}(\alpha) + C_{23}(\alpha) + C_{32}(\alpha) + C_{23}(1 - \alpha) + C_{32}(1 - \alpha)] + \\ &\quad + 2 \sin^2 \beta [S_{31}(0) - S_{31}(1) - C_{32}(1)] \} \tau, \\ \langle \sigma \rangle &= \frac{\varepsilon^2}{4} \{ \cos^2 \beta [C_{13}(\alpha) + C_{31}(\alpha) + C_{13}(1 - \alpha) + C_{31}(1 - \alpha) - S_{23}(\alpha) - S_{32}(\alpha)] + \\ &\quad + 2 \sin^2 \beta [S_{32}(1) - S_{32}(0) - C_{31}(1)] \} \tau, \\ \langle k \rangle &= 1 + \varepsilon^2 [\cos^2 \beta S_{33}(\alpha) + \sin^2 \beta [S_{11}(1) + S_{22}(1) - 2C_{12}(1)]] \tau,\end{aligned} \tag{1}$$

$$S_{ij}(\omega) = 2 \int_{-\infty}^0 K_{ij}(\tau) \cos \omega \tau d\tau, C_{ij}(\omega) = 2 \int_{-\infty}^0 K_{ij}(\tau) \sin \omega \tau d\tau.$$

Из формул (1) следует важный вывод о линейном нарастании по времени в среднем углового отклонения вектора кинетического момента относительно неподвижного пространства. Это вызвано коррелированностью компонент векторного случайного процесса $\vec{f}$. Этот вывод является новым в теории движения твердого тела. В случае однокомпонентной вибрации, в соответствии [2], имеет место экспоненциальное убывание в среднем этих величин. Таким образом, коррелированность компонент случайного процесса $\vec{f}$ приводит к дестабилизации углового положения вектора кинетического момента гироскопа в среднем.

Уравнения для моментных функций второго порядка в общем случае очень громоздки. Сделаем упрощающее предположение о малости фазовых координат и их начальных отклонений (что всегда имеет место в реальности при эксплуатации гироскопических приборов). В этом случае получаем следующие выражения для соответствующих среднеквадратичных значений фазовых координат, описывающих движение неконтактного гироскопа:

$$\begin{aligned} \langle \rho^2 + \sigma^2 \rangle &= 2\varepsilon^2 [S_{33}(\alpha) \cos^2 \beta + (S_{11}(0) + S_{22}(0)) \sin^2 \beta] \tau \\ \langle G_1^2 + G_2^2 \rangle &= 2\varepsilon^2 [S_{33}(1 - \alpha) \cos^2 \beta + (S_{11}(1) + S_{22}(1) + C_{12}(1)) \sin^2 \beta] \tau \\ \langle (1 - k)^2 \rangle &= \varepsilon^2 [(S_{11}(\alpha) + S_{22}(\alpha) + 2C_{12}(\alpha)) \cos^2 \beta] \tau. \end{aligned} \quad (2)$$

Из формул (2) следует вывод о линейном по времени нарастании амплитуды квадратичного отклонения вектора кинетического момента относительно инерциального пространства, а также амплитуды квадратичного отклонения оси динамической симметрии гироскопа относительно направления вектора кинетического момента, при этом, как следует из приведенных формул, скорости изменения этих величин зависят как от осевой, так и от радиальной составляющих дебаланса гироскопа. Если в этих формулах положить $S_{11} = 0$, $S_{22} = 0$, (что будет соответствовать случаю чисто вертикальной вибрации или вибрации точки подвеса в плоскости), то придем к формулам, полученным в [1], [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Медведев А.В. Динамика быстро вращающегося неконтактного гироскопа при плоских случайных вибрациях точки подвеса // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2013. Т. 18. Вып. 1. С. 70-72.
2. Медведев А.В. Динамика неконтактного гироскопа при случайной вибрации основания // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2012. Т. 17. Вып. 1. С. 50-52.
3. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М., 1975.
4. Хасьминский Р.З. Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью.- Теория вероятностей и ее применения. 1966. 11. № 3. 444-462.

Medvedev A.V. SPEEDY ROTATING NON-CONTACT GYROSCOPE DYNAMICS UNDER IN SPACE RANDOM BASEMENT VIBRATIONS

Problem of fast-rotating unbalanced gyroscope under flat random vibrations, which is presumed as stationary stochastic process, is analyzed. Equations of of first- and second-order torque functions were obtained and analyzed with the help of stochastic system averaging method.

Key words: gyroscope; trihedron; unbalance, random process; correlation function; kinetic moment; moment of force; stochastic equation; averaging method; torque functions.